A cura del CRSEM – Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica
Co / Dipartimento di Matematica e Informatica di Cagliari

Dall'aritmetica all'algebra ("Sfida fra due amici")

Prerequisiti:

- Saper eseguire istruzioni, analizzare tabelle di valori, prevedere una possibile prosecuzione di una tabella, saper riconoscere regolarità.
- Avere padronanza delle proprietà commutativa dell'addizione e distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, nell'insieme dei numeri naturali.
- Saper utilizzare le parentesi per produrre ed eseguire espressioni numeriche.
- Saper utilizzare le lettere come variabili per generalizzare.

Saperi da costruire:
Dare significato all'uso delle lettere nel calcolo algebrico e nella risoluzione di problemi.

Contenuti matematici
Terminologia specifica che potrebbe già essere stata introdotta (variabile, costante, monomio, monomi simili, parte letterale, coefficiente, binomio), oppure da introdurre, in una fase di sistemazione alla fine di questa attività. Operazioni con monomi e binomi.

Articolazione dell'attività

Fase 1 - Lavoro in coppia - tempo 30' (15' per l'introduzione dell'attività e la comprensione della consegna +15' per la formulazione delle risposte)

Consegnare la scheda 1AAr - La sfida fra due amici
Due amici si sfidano. Marco dice a Luca:
"Io ti proporrò delle moltiplicazioni fra due numeri consecutivi e tu mi dovrai rispondere con la somma di due numeri, nella quale un addendo deve essere uguale a uno dei fattori della moltiplicazione che ti propongo. ***Ricorda, però, che il prodotto dei miei due numeri deve essere uguale alla somma dei tuoi.***

Il docente si assicura della comprensione del testo, della conoscenza della terminologia specifica (*numeri consecutivi*, *somma*, *addendo*, *moltiplicazione*, *prodotto*, *fattore*…) ed eventualmente fa notare che uno stesso numero si può scrivere in diversi modi facendo anche degli esempi: (3+3; 2+4; $2+2^2$; 2*3 **sono modi diversi di scrivere lo stesso numero 6**).Assicurarsi che gli studenti abbiano svolto l'attività presente nei prerequisiti).

Durante il lavoro controlla che tutti eseguano correttamente le istruzioni ed invita gli studenti a soffermarsi ancora sul testo e a completare la tabella riportando anche le due operazioni corrispondenti.
Ci si aspetta che gli alunni scelgano come primo addendo sia il primo fattore che il secondo fattore.

Fase 2 - Lavoro collettivo - Scheda 2AAr (tempo 15')
L'insegnante distribuisce a ciascun alunno la scheda **2AAr** e propone di registrare i risultati di ciascuno per analizzare le modalità di soluzione e i risultati tutti insieme. Se avrà constatato che come primo addendo sia stato preso indifferentemente il fattore più grande o quello più piccolo, chiama due studenti che si trovano in quelle situazioni e propone che le operazioni vengano registrate in tabelle diverse, per esempio a) e b).
Nella seconda colonna della tabella a) fa riportare le addizioni che hanno come primo addendo il fattore minore, nella seconda colonna della tabella **b)** le addizioni che hanno come primo addendo il fattore maggiore.

Invita, quindi, alcuni studenti a completare le tabelle predisposte alla lavagna, con le risposte prodotte durante il lavoro di coppia, seguendo tutti lo stesso criterio. (In questa fase il docente guida la compilazione delle tabelle correggendo gli errori di calcolo eventualmente commessi e verifica che tutti gli altri alunni stiano scrivendo fedelmente e in modo corretto nella loro scheda personale).

Fase 3 - Lavoro di gruppo Scheda 3AAr (con i dati della tabella a) compilata della scheda 2AAr– (30')

***Prima parte*[1]**

Durante il lavoro di gruppo l'insegnante stimola gli alunni a discutere fra loro e farà da moderatore e guida, senza correggere gli errori e indirizzare prematuramente verso la risposta corretta; registra gli interventi e le riflessioni dei singoli e stimola **ciascun gruppo** a prendere coscienza delle risposte.

Nel caso in cui nessun gruppo sia ancora riuscito a scrivere un'uguaglianza valida per qualsiasi numero, l'insegnante fa domande stimolo:

- ✓ Scrivete il secondo addendo in modo diverso, tenendo conto della relazione che c'è fra gli addendi della seconda colonna.
- ✓ Come si possono scrivere due numeri consecutivi?

Fase 3.1 Discussione di classe per confrontare soluzioni e strategie

Il portavoce di ciascun gruppo espone sia la dinamica del gruppo (elementi di dubbio, di discussione) che le strategie condivise dal gruppo stesso).

L'insegnante modera la discussione, riferendosi agli interventi e alle riflessioni più interessanti osservate nei gruppi e analizza gli errori che eventualmente sono stati rilevati. Se ancora nessuno si è reso conto che il secondo addendo si può esprimere in funzione della seconda potenza del primo, l'insegnante completa alla lavagna la prima riga ed eventualmente anche la seconda alla lavagna e poi invita un alunno a completare le altre righe; mentre gli altri completeranno la loro scheda.

Il docente gestisce la discussione chiedendo a ciascun studente di controllare la loro tabella compilata con quella scritta alla lavagna e di intervenire dando il proprio parere, fino a completamento della tabella.

Dovrà risultare trascritta alla lavagna la tabella completata nel modo seguente (la formula generale è oggetto della discussione successiva e della fase 3.2 di istituzionalizzazione).

Moltiplicazione	Addizione	Relazione fra il primo e il secondo addendo
$1*2$	1+1	$1+1^2$
$2*3$	2+4	$2+2^2$
$3*4$	3+9	$3+3^2$
$4*5$	4+16	$4+4^2$
$5\bullet 6$	5+25	$5+5^2$
$6\bullet 7$	6+36	$6+6^2$
$7\bullet 8$	7+49	$7+7^2$

[1] La terza fase si scompone in due parti: **Prima parte** con i dati della tabella **a) della scheda 2AAr** e **Seconda parte** con i dati della tabella **b) della scheda 2AAr.** La prima è rivolta sia alle classi della scuola secondaria di primo grado che a quelle di secondo grado, mentre la seconda è rivolta prevalentemente alle classi della secondaria di secondo grado.

…..	……	….
$n\bullet(n+1)$	………	$n+n^2$

Attraverso la discussione dovrà scaturire che:
- **il secondo addendo è il quadrato del primo (da scrivere a fianco come potenza).**
- **attribuendo *n* al numero più piccolo, la regola generale che ne scaturisce è $n(n+1) = n+n^2$**
- eventualmente[2] attribuendo n-1 al numero più piccolo e n al numero più grande, la regola generale che ne scaturisce è $(n-1)\,n = (n-1)+(n-1)^2$

La prima formula permette di evidenziare la regola del **prodotto di un monomio per un binomio**.
La seconda formula non permette l'immediata visualizzazione della proprietà distributiva.
In questo momento il docente farà notare che l'identità che scaturisce applicando la formula a casi particolari costituisce una verifica della formula stessa per quei casi particolari utilizzati.
Farà inoltre notare che l'applicazione della proprietà distributiva al primo membro dell'uguaglianza è una dimostrazione del fatto che l'uguaglianza fra i due membri è valida per qualsiasi numero.

Fase 3.2 Conclusione e istituzionalizzazione
La conclusione collettiva, tenuto conto degli interventi degli alunni durante la discussione di classe, deve essere finalizzata:
- al riconoscimento dell'**identità**,
- al richiamo della **proprietà distributiva**,
- alla **regola del prodotto di un monomio per un binomio**,
- al **quadrato di un binomio.**

Seconda parte

Fase 3- Lavoro di gruppo Scheda 3AAr (con i dati della tabella b)compilata della scheda 2AAr– (30')
Durante il lavoro di gruppo l'insegnante stimola gli alunni a discutere fra loro e farà da moderatore e guida, senza correggere gli errori e indirizzare prematuramente verso la risposta corretta; registra gli interventi e le riflessioni dei singoli e stimola **ciascun gruppo** a prendere coscienza delle risposte. Nel caso in cui nessun gruppo sia ancora riuscito a scrivere un'uguaglianza valida per qualsiasi numero, l'insegnante fa domande stimolo:
- ✓ quale relazione c'è fra il secondo e il primo addendo?
- ✓ per scrivere il secondo addendo posso servirmi del primo?
  E ancora:
- ✓ se necessario l'insegnante invita gli alunni a partire dalla terza riga: (4+4* 2) per poi completare successivamente anche la prima e la seconda riga.
  Si dovrebbe arrivare a scrivere la terza colonna in questo modo

Moltiplicazione	Addizione	E' stato riscritto il primo addendo della seconda colonna, il secondo addendo è stato scritto come prodotto di due numeri (il primo fattore è uguale al primo addendo della seconda colonna, il secondo fattore……..)
1 * 2	2 + 0	2 + 2 * 0
2 * 3	3 + 3	3 + 3 * 1

[2] La scelta della lettera *n* e della modalità per indicare il numero più piccolo nella formula sono arbitrari.

3 * 4	4 + 8	4 + 4 * 2
4 * 5	5 + 15	5 + 5 * 3
5 * 6	6 + 24	6 + 6 * 4
6 * 7	7 + 35	7 + 7 * 5
7 * 8	8 + 48	8 + 8 * 6
n *(n+1)		(n+1)+ (n+1)* ?
(n-1) * n		n + n * ?
(n+1)*(n+2)		(n+2) + (n+2)* ?

Fase 3.1 Discussione di classe per confrontare soluzioni e strategie

Il portavoce di ciascun gruppo espone sia la dinamica del gruppo (elementi di dubbio, di discussione) che le strategie condivise dal gruppo stesso.

L’insegnante modera la discussione, richiamandosi agli interventi e alle riflessioni più interessanti osservate nei gruppi. La discussione continua dato che la terza colonna compilata in questo modo non permette ancora di scrivere una regola generale.

Il docente in questa fase fa concentrare l’attenzione sui due fattori della terza colonna finché non viene osservato che hanno una caratteristica comune: differiscono sempre di due (far scrivere il secondo fattore con una sottrazione (il minuendo è uguale al primo fattore e il sottraendo è sempre due).

Proprio questa regolarità permette di trovare la regola generale.

La tabella compilata sarà scritta alla lavagna e naturalmente anche la regola generale che ne scaturisce.

Moltiplicazione	Addizione	Terza colonna
1 * 2	2 + 0	2 + 2 * (2 -2)
2 * 3	3 + 3	3 + 3 * (3 -2)
3 * 4	4 + 8	4 + 4 * (4 -2)
4 * 5	5 + 15	5 + 5 * (5 -2)
5 * 6	6 + 24	6 + 6 * (6 -2)
6 * 7	7 + 35	7 + 7 * (7 -2)
7 * 8	8 + 48	8 + 8 * (8 -2)
n *(n+1)		(n+1)+ (n+1)* (n+1 -2)
(n-1) * n		n + n * (n - 2)
(n+1)*(n+2)		(n+2) + (n+2)* (n+2 -2)

Come regola generale, si prevede almeno una delle tre ultime risposte a seconda della denominazione che si è attribuita ai due numeri consecutivi.

Fase 3.2 Conclusione e istituzionalizzazione

Regole generali[3]:

n(n+1) (prima colonna) = (n+1)+(n+1)* (n+1-2) (terza colonna)

assegnato **n** (nella prima colonna) al primo fattore ed **n+1** al secondo fattore;

ed eseguendo i calcoli (nella terza colonna) n+1+(n+1)(n-1)= n+1+n^2 -1= **n+ n^2**

Verificato che il risultato della prima colonna è uguale al risultato della terza colonna

Oppure

(n-1) n (prima colonna) = n+ n *(n-2) (terza colonna)

assegnato **(n-1**) nella prima colonna al primo fattore ed **n** al secondo fattore;

ed eseguendo i calcoli (nella terza colonna) n+n^2-2n=**n^2-n**

Verificato che il risultato della prima colonna è uguale al risultato della terza colonna

Oppure

(n+1)•(n+2) Prima colonna = (n+2) + (n+2) * (n+2-2) (terza colonna)

assegnato **(n+1)** nella prima colonna al primo fattore ed **(n+2)** al secondo fattore

ed eseguendo i calcoli (nella terza colonna) n+2+n^2+2n=**n^2+3n+2**

Verificato che il risultato della prima colonna è uguale al risultato della terza colonna

Durante la discussione di classe si è potuto verificare che sono tutte **identità**.
Si è riusciti a dare una **motivazione ai calcoli**. quando si sono eseguite tutte le operazioni sia al primo che al secondo membro,

Come verifica o consolidamento della capacità di tradurre dal linguaggio numerico a quello algebrico, si potrebbero proporre esercizi del tipo:

Esaminate le seguenti espressioni e cercate una formula generale che le possa rappresentare tutte quindi eseguite i calcoli dell'espressione trovata[4].

10 *12 + 10^2 *6+10*11
6 * 8 + 6^2 * 2 +6 *7
13*15 + 13^2 *9 +13*14

Soluzione:
In ciascun riga ci sono tre addendi, ciascuno addendo è formato da un prodotto

- ✓ primo addendo n (n+2) in tutte e tre le righe
- ✓ secondo addendo n^2(n-4) in tutte e tre le righe
- ✓ terzo addendo n (n+1) in tutte e tre le righe

[3] Con numeri consecutivi indicati in modo diverso.

[4] Risposta: formula generale n(n+2)+n^2(n-4)+n(n+1)

Alunni………………………………………………………

Scheda 1AAr
Attività a coppie

La sfida fra due amici

Due amici si sfidano. Marco dice a Luca:
"Io ti proporrò delle moltiplicazioni fra due numeri consecutivi e tu mi dovrai rispondere con la somma di due numeri, dove un addendo deve essere uguale a uno dei fattori della moltiplicazione che ti propongo. Ricorda che il prodotto dei miei due numeri deve essere uguale alla somma dei tuoi"

Ripetete questa sfida fra di voi interpretando, a turno, i ruoli di Marco e Luca e trascrivete nella seguente tabella:

Moltiplicazione fra due numeri consecutivi	Addizione fra due numeri

Quali strategie avete usato per arrivare alla risposta? Spiegate come avete proceduto

Scheda 2AAr
Lavoro collettivo

Utilizzando gli esempi proposti dai compagni alla lavagna, compila la seguente tabella

Tabelle a)

Moltiplicazione	Addizione avente come primo addendo il fattore minore

Tabella b)

Moltiplicazione	Addizione avente come primo addendo il fattore maggiore

Alunni secondaria di primo grado…………………………………………………….

Scheda 3AAr

Lavoro di gruppo (30')

Nella scheda sono stati già trascritti gli esempi della **tabella a)** della scheda **2AAr completata** alla lavagna

1. Completare la terza colonna secondo le indicazioni

Moltiplicazione	Addizione	Modo diverso di scrivere il secondo addendo[5]
1*2	1+1	
2*3	2+4	
3*4	3+9	
4*5	4+16	
5*6	5+25	
6*7	6+36	
7*8	7+49	

.

2. Quale regolarità hai scoperto?...

3. E' possibile scrivere un'uguaglianza valida per qualsiasi numero?..............................

4. Scrivetela se pensate che sia possibile.

[5] Da sostituire con : "Osserva gli esempi già trascritti e completa" nel caso sia stato necessario completare le prime due righe con: $1+1^2$e $2+2^2$

Alunni secondaria di secondo grado……………………………………………………………………

Scheda 3AAr

Lavoro di gruppo

Nella scheda sono stati già trascritti gli esempi della **tabella b)** della scheda **2AAr completata alla lavagna**.

1. Completate la terza colonna secondo le indicazioni

Moltiplicazione	Addizione	Osservate il secondo addendo: In ciascuna delle addizioni, scrivete in modo diverso il secondo addendo, in modo da far comparire il primo addendo
1*2	2+0	
2*3	3+3	
3*4	4+8	
4*5	5+15	
5*6	6+24	
6*7	7+35	
7*8	8+48	
n*(n+1)		
(n-1) * n		
(n+1)*(n+2)		

2. Quale regolarità avete scoperto?

3. E' possibile scrivere un'uguaglianza valida per qualsiasi numero?

4. Scrivetela se pensate che sia possibile.